

# Estabilización de un robot móvil tipo (2,0)

J. P. Sánchez-Santana<sup>1</sup>, J. F. Guerrero-Castellanos<sup>2</sup>, S. Ramírez-Martínez<sup>1</sup>,  
M. G. Villarreal-Cervantes<sup>3</sup>.

<sup>1</sup> Universidad Politécnica de Puebla. Tercer Carril del Ejido “Serrano” s/n, San Mateo Cuanalá,  
Juan C. Bonilla, C. P. 72640, Puebla, México.

<sup>2</sup> Facultad de Ciencias de la Electrónica-BUAP. Av. San Claudio y 18 Sur, Col. San Manuel,  
C.P. 72570, Puebla, Pue. México.

<sup>3</sup> Centro de Innovación y Desarrollo Tecnológico en Cómputo. Av. Juan de Dios Bátiz s/n,  
Col. Nueva Industrial Vallejo, Deleg. Gustavo A. Madero, C.P. 07700, México D.F.

psanchez@uppuebla.edu.mx

Teléfono: (52)-222-7746656

**Resumen**—En este trabajo se presenta la estabilización de un robot móvil tipo (2,0), desde cualquier condición inicial al origen. El objetivo es demostrar que con el modelo cinemático, la extensión dinámica de sus variables de estados y una ley de control sencilla, se logra la estabilización del sistema no lineal. Debido a la simplicidad de la ley de control es posible implementarla en sistemas empotrados con bajo poder computacional. La estrategia de control propuesta considera los límites en las señales de entrada del sistema mediante el uso de funciones de saturación. Se analiza la estabilidad, en el sentido de Lyapunov, del sistema en lazo cerrado. El esquema de control se valida mediante resultados en simulación con el objeto de demostrar su efectividad.

**Palabras clave:** Robot móvil (2,0), estabilización, funciones de saturación, control no lineal.

## I. INTRODUCCIÓN

La robótica móvil ha tomado auge en atención a controlar sistemas de forma autónoma, por consiguiente se establece la necesidad de evaluar sistemas de control simples o sencillos que resuelvan la diversidad de problemas de una forma confiable, estable y robusta. Entendiendo que los recursos de procesamiento de información deben ser mínimos para lograr una sinergia apropiada entre las demás áreas como capacidades de procesamiento digital, consumo de energía, optimización de recursos de hardware en sistemas empotrados, entre otras. Varios problemas de control son atendidos por varios autores a un robot móvil, tal como seguimiento de trayectoria, navegación y estabilización. El objetivo de control de este trabajo está enfocado a la estabilización en lazo cerrado, bajo condiciones iniciales arbitrarias, de un robot móvil tipo (2,0). La clasificación está establecida por (Campion y D’Andrea-Novel, 1996) a partir de los grados de movilidad y direccionalidad del robot móvil.

El problema de estabilización para el robot móvil (2,0) ha recibido mucha atención en los últimos años (Zhang y M., 1997), (Niño, 2007), (Nascimento Martins, 2008), (Silva, 2008) y (Chang, 2010). Se ha demostrado que

este problema de control no puede ser resuelto mediante el uso de una ley por retroalimentación estática de estados invariantes en el tiempo (Campion y Bastin, 1991) y (Samson y Ait-Abderrahim, 1991). Por ello, se plantea utilizar sistemas de control de retroalimentación discontinuos o variantes en el tiempo, como en (Bloch y Reyhanoglu, 1991) y (Pomet y Campion, 1992). Los autores (Canudas y Sordalen, 1992) y (Pomet y Campion, 1992) ejemplifican la estabilización del robot móvil con restricciones no holonómicas. Un ejemplo claro de un controlador discreto para el seguimiento de trayectorias se presenta en (Canudas y Sordalen, 1992). En (Zhang y M., 1997) se establece un trabajo amplio de la estabilización de un robot móvil con restricciones no holonómicas con un control de retroalimentación discontinuo, con consecuencias de procesamiento de cálculo complejo para su implementación. En (Sira, 2011) se presenta el control lineal robusto de un vehículo no holonómico de un solo eje considerándolo como un sistema no lineal diferencialmente plano.

El interés particular del presente trabajo está enfocado al problema de regulación para el robot móvil (2,0) con la inclinación de una estrategia de control sencilla y funcional, para lo cual se considera al sistema con extensión dinámica de sus variables de estado. Además la estrategia de control es considerada en cascada para mejorar significativamente la estabilización del sistema. Entonces, inspirados en los trabajos de (Teel, 1992) y (Johnson y Kannan, 2003) se proponen dos leyes de control basadas en saturaciones imbricadas con garantía de polos reales diferentes de uno.

El artículo está organizado de la siguiente manera. En la sección II se establecen algunos preliminares matemáticos para atender el modelo matemático del robot móvil. En la sección III se define el problema a tratar. En la sección IV corresponde a la estrategia de control. La sección V se presenta los resultados obtenidos en simulación. Finalmente, las conclusiones y perspectivas se presentan en la sección

VI.

## II. PRELIMINARES MATEMÁTICOS

### II-A. Modelo Matemático del robot móvil.

La representación esquemática de un robot móvil tipo (2,0), el cual tiene dos grados de libertad y cero de direccionalidad se muestra en la Figura 1, donde se proyecta  $P(x_1, x_2)$  en el plano coordenado  $(X_1, X_2)$  del sistema de referencia  $(X_1, X_2, X_3)$ , con una orientación  $\theta$  del robot con referencia al eje  $X_1$ . Su locomoción es lograda a través de las velocidades angulares  $w_d$  y  $w_i$  que proporcionan las dos ruedas convencionales, con lo cual se obtiene la velocidad lineal  $u_1$  y la velocidad angular  $u_2$ .

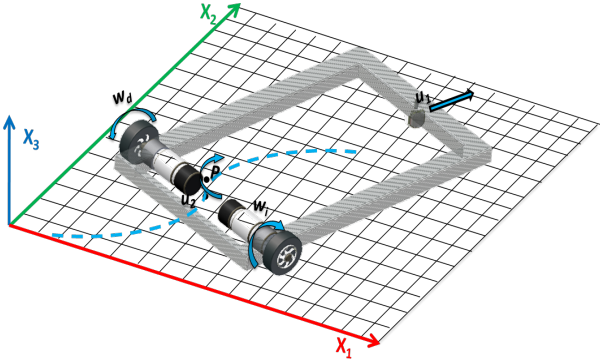


Figura 1. Localización del robot móvil (2,0) en el plano coordenado.

La velocidad lineal en el sistema de coordenadas inerciales está formada por las proyecciones de  $u_1$  según los ejes  $X_1$  y  $X_2$ , es decir  $\dot{x}_1$  y  $\dot{x}_2$ . La velocidad angular  $u_2$  es igual a la razón de cambio de  $\theta$  con respecto al tiempo y es denotada como  $\dot{\theta}$ . Así, el modelo cinemático del robot móvil tipo (2,0) se muestra en (1), donde  $u_1$  y  $u_2$  son las variables de control.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= u_1 \cos \theta \\ \dot{x}_2 &= u_1 \sin \theta \\ \dot{\theta} &= u_2\end{aligned}\quad (1)$$

En (Sánchez, 2005) es posible verificar la relación existente entre  $u_1$  y  $u_2$  con  $w_d$  y  $w_i$  como lo define la Ecuación (2).

$$\begin{aligned}u_1 &= \frac{(w_d + w_i)r}{2} \\ u_2 &= \frac{(w_d - w_i)r}{2l}\end{aligned}\quad (2)$$

donde  $r$  es el radio de la rueda y  $l$  es la distancia entre el punto  $P$  y alguna de las ruedas.

### II-B. Control de una cadena de integradores mediante entradas acotadas.

*Definición 1:* Dada una constante positiva  $M_j$ , una función  $\sigma_{M_j} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  se dice ser una función lineal de saturación para  $M_j$  si es continua, no decreciente tal que

$$\sigma_{M_j}(s) := \min(M_j, \max(-M_j, s)) \quad (3)$$

y satisface que  $s\sigma_{M_j}(s) > 0$  para todo  $s \neq 0$ .

Las funciones de saturación son de mucho interés en sistemas que están sujetos a restricciones en la amplitud de la entrada. En este caso los límites  $M_j$  permiten acotar la magnitud de la señal de control y establecer un rango de operación de los actuadores y así evitar posibles daños.

*Lema 1:* Considere al doble integrador  $\dot{y}_1 = y_2, \dot{y}_2 = u$ , con la siguiente ley de control acotada

$$u = -\sigma_{M_2}\left(a_1 y_2 + \sigma_{M_1}(a_2 y_2 + a_1 a_2 y_1)\right) \quad (4)$$

donde  $\sigma_{M_j}(\cdot)$  está definida en (3), con  $M_2 > 2M_1$  y  $a_{(1,2)} > 0$  parámetros de sintonización. Entonces, el sistema en lazo cerrado es globalmente y asintóticamente estable (GAS).

La demostración de este Lema se lleva a cabo utilizando lo expuesto en los trabajos (Teel, 1992) y (Johnson y Kannan, 2003) pero se realizará con fines de claridad.

*Demostración:* Sea la transformación lineal  $\zeta = Ty$  con  $y = (y_1 \ y_2)^T$  la cual transforma al doble integrador en el sistema  $\dot{\zeta} = A_\zeta \zeta + B_\zeta u$ , donde:

$$T = \begin{pmatrix} a_2 a_1 & a_2 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix}, A_\zeta = \begin{pmatrix} 0 & a_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B_\zeta = \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

Gracias a este cambio de variable el doble integrador queda expresado en la forma:

$$\begin{aligned}\dot{\zeta}_1 &= a_2 \zeta_2 + a_2 u \\ \dot{\zeta}_2 &= a_1 u\end{aligned}\quad (6)$$

con  $u = -\sigma_{M_2}(\zeta_2 + \sigma_{M_1}(\zeta_1))$ . En consecuencia, el sistema en lazo cerrado se escribe como:

$$\begin{aligned}\dot{\zeta}_1 &= a_2[\zeta_2 - \sigma_{M_2}(\zeta_2 + \sigma_{M_1}(\zeta_1))] \\ \dot{\zeta}_2 &= -a_1 \sigma_{M_2}(\zeta_2 + \sigma_{M_1}(\zeta_1))\end{aligned}\quad (7)$$

Con el fin de analizar la convergencia de las variables del sistema, considere primeramente la evolución del estado  $\zeta_2$ . Considere la función candidata de Lyapunov  $V_2 = \zeta_2^2$ . Derivando esta función y evaluandola a lo largo de las trayectorias de  $\zeta_2$ , se obtiene  $\dot{V}_2 = 2\zeta_2 \dot{\zeta}_2 = -2a_1 \zeta_2 \sigma_{M_2}(\zeta_2 + \sigma_{M_1}(\zeta_1))$ . Suponiendo que  $|\zeta_2| > 2M_1$ , i.e  $|\zeta_2| \in [2M_1 + \infty]$ , lo que implica que  $|\zeta_2 + \sigma_{M_1}(\zeta_1)| \geq M_1 + \varepsilon$ , con  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeño. Por lo tanto, se puede afirmar que  $\zeta_2 + \sigma_{M_1}(\zeta_1)$  es del mismo signo que  $\zeta_2$  y en consecuencia  $\dot{V}_2 < 0$ . Lo anterior implica que  $\zeta_2$  va a entrar al conjunto  $\Phi_2 = \{\zeta_2 : |\zeta_2| \leq 2M_1\}$  en un tiempo finito  $t_1$  y va a permanecer en él para todo  $t > t_1$ . Mientras tanto, por el Lema 4 en (Marchand y Hably, 2005) se garantiza que el estado  $\zeta_1$  se mantiene acotado.

Una vez, sucedido esto,  $\zeta_2 + \sigma_{M_1}(\zeta_1) \in [-2M_1, 2M_1]$ , y esto significa que  $\sigma_{M_2}(\cdot)$  no está saturada, por lo tanto el Sistema (7) se convierte en:

$$\begin{aligned}\dot{\zeta}_1 &= -a_2 \sigma_{M_1}(\zeta_1) \\ \dot{\zeta}_2 &= -a_1[\zeta_2 + \sigma_{M_1}(\zeta_1)]\end{aligned}\quad (8)$$

Sea la siguiente función candidata de Lyapunov para considerar la evolución de  $\zeta_1 : V_1 = \zeta_1^2$ . Derivando esta función y evaluandola a lo largo de la trayectoria de  $\zeta_1$ , se obtiene,  $\dot{V}_1 = 2\zeta_1\dot{\zeta}_1 = -2a_2\zeta_1\sigma_{M_1}(\zeta_1)$ . De acuerdo a la definición de la función de saturación, esto implica que  $\dot{V}_1 < 0$  y  $\zeta_1$  decrece y entra al conjunto  $\Phi_1 = \{\zeta_1 : |\zeta_1| \leq M_1\}$  en un tiempo finito  $t_2 > t_1$  y se mantiene en él para todo  $t > t_2$ . Esto significa que  $\sigma_{M_1}(\cdot)$  no está saturada y el sistema (8) se convierte en:

$$\begin{cases} \dot{\zeta}_1 = -a_2\zeta_1 \\ \dot{\zeta}_2 = -a_1(\zeta_2 + \zeta_1) \end{cases} \quad (9)$$

o en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \dot{\zeta}_1 \\ \dot{\zeta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_2 & 0 \\ -a_1 & -a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix} \quad (10)$$

que tiene la forma  $\dot{\zeta} = A\zeta$ , cuya solución  $\zeta = e^{At}\zeta(0)$  tiende a cero cuando  $t \rightarrow \infty$ , puesto que A es Hurwitz. Por lo tanto el sistema es global y asintóticamente estable y además es exponencialmente estable de manera local. ■

Considere ahora el siguiente sistema no lineal,

$$\dot{y}_1 = y_2 \quad \dot{y}_2 = \sigma_{M_3}(u) \quad z = y_1 \quad (11)$$

Ahora el objetivo es hacer que  $z$  siga una trayectoria de referencia deseada  $z_d$ , dada por  $z_d, \dot{z}_d, \ddot{z}_d$ .

*Lema 2:* Si  $|\ddot{z}_d| \leq M_3 - \delta$  para todo  $t > t_0$  y para algún  $\delta > 0$ , con  $M_2 \leq \delta$ ,  $M_2 > 2M_1$ , la ley de control

$$u = \ddot{z}_d - \sigma_{M_2}(a_1\tilde{z}_2 + \sigma_{M_1}(a_2\tilde{z}_2 + a_1a_2\tilde{z}_1)) \quad (12)$$

con  $\sigma_{M_j}(\cdot)$  definida en (3) y  $\tilde{z}_1 = y_1 - y_d$  y  $\tilde{z}_2 = y_2 - \dot{y}_d$ , resulta en un seguimiento asintótico.

*Demostración:* En términos de  $\tilde{z}_1$  y  $\tilde{z}_2$ , (11) se convierte en

$$\dot{\tilde{z}}_1 = \tilde{z}_2 \quad \dot{\tilde{z}}_2 = -\ddot{z}_d + \sigma_{M_3}(u) \quad (13)$$

Observe que con la ley de control (2) y seleccionando  $M_2 \leq \delta$ , entonces  $\sigma_{M_3}(\cdot)$  siempre opera en su región lineal, por lo que el sistema en lazo cerrado es:

$$\dot{\tilde{z}}_1 = \tilde{z}_2 \quad \dot{\tilde{z}}_2 = -\sigma_{M_2}(a_1\tilde{z}_2 + \sigma_{M_1}(a_2\tilde{z}_2 + a_1a_2\tilde{z}_1)) \quad (14)$$

este sistema es similar al tratado en el Lema 1, por lo que las condiciones de estabilización ya están establecidas. Entonces  $\tilde{z}_{1,2}(t) \rightarrow 0$  y en consecuencia  $z(t) = y_1(t) \rightarrow z_d(t)$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . Esto concluye la prueba de seguimiento asintótico. ■

### III. DISEÑO DEL SISTEMA DE CONTROL

El robot móvil tipo (2,0) representado por (1) es descompuesto en dos subsistemas. El primer subsistema  $\Sigma_1$  representa las ecuaciones del movimiento de traslación y el subsistema  $\Sigma_2$  representa la ecuación del movimiento de rotación, la cual es independiente de  $x_1$  y  $x_2$ . Sea  $x := (x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}) = (\int x_1, \int x_2, x_2, x_1)$ . Entonces, el subsistema  $\Sigma_1 := f(x, \theta)$  y  $\Sigma_2 := g(\theta)$  se escriben como:

$$\begin{cases} \dot{x}_{11} = x_{11} \\ \dot{x}_{12} = u_1 \cos \theta \\ \dot{x}_{21} = x_{21} \\ \dot{x}_{22} = u_1 \sin \theta \end{cases} \quad (15)$$

$$\dot{\theta} = u_2 \quad (16)$$

Note que el sistema  $\Sigma_2$  es un integrador simple con  $u_2$  como única entrada externa. Por otra parte, el sistema  $\Sigma_1$  está constituido de dos dobles integradores, independientes, que contienen  $u_1$  y  $\eta$  como entradas externas comunes. Entonces,  $\theta$  será considerado un control virtual (Olfati-Saber, 2000), (Zavala *et al.*, 2003), que conjuntamente con  $u_1$ , controlará al subsistema  $\Sigma_1$ . Primeramente, suponga que existe un control  $u_2$  que lleva a  $\theta$  a un ángulo deseado  $\theta_d$  el cual está dado por:

$$\theta_d := \arctan\left(\frac{r_2}{r_1}\right) \quad (17)$$

donde  $r_1$  y  $r_2$  se definirán posteriormente. Note que para el  $\theta_d$  representado por (17), se tiene que  $\cos(\theta_d) = \frac{r_1}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}}$  y  $\sin(\theta_d) = \frac{r_2}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}}$ . De esta manera, la entrada de control

$$u_1 = \sqrt{r_1^2 + r_2^2} \quad (18)$$

con  $\theta = \theta_d$ , transforma al sistema (15) en:

$$\begin{cases} \dot{x}_{11} = x_{11} \\ \dot{x}_{12} = r_1 \\ \dot{x}_{21} = x_{21} \\ \dot{x}_{22} = r_2 \end{cases} \quad (19)$$

*Teorema 1:* Considere al sistema (1) con la entrada de control acotada  $u_1 = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}$  con  $r_1$  y  $r_2$  dadas por:

$$\begin{cases} r_1 = -\sigma_{M_2}(a_1x_{12} + \sigma_{M_1}(a_2x_{12} + a_1a_2x_{11})) \\ r_2 = -\sigma_{M_2}(b_1x_{22} + \sigma_{M_1}(b_2x_{22} + b_1b_2x_{21})) \end{cases} \quad (20)$$

y la entrada  $u_2$  dada por:

$$u_2 = \dot{\theta}_d - \sigma_{M_\theta}(\theta - \theta_d) \quad (21)$$

donde  $\sigma_{M_1}$ ,  $\sigma_{M_2}$  y  $\sigma_{M_\theta}$ , están definidas por (3) y  $M_2 > 2M_1$ . Entonces, para un  $x(t=0) \in \mathbb{R}^4$  donde  $x = (x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22})$ ,  $\lim x(t) = 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$  con  $0 \leq \sqrt{2}M_2 \leq u_1, \forall t \geq 0$ .

*Demostración:* Considere primeramente la estabilización del movimiento de rotación. Sea  $\hat{\theta} = \theta - \theta_d$ . Entonces

la dinámica del error viene dada por:  $\dot{\tilde{\theta}} = u_2 - \dot{\theta}_d$ . Usando la ley de control (21) resulta en  $\dot{\tilde{\theta}} = -\sigma_{M\theta}(\tilde{\theta})$ . Considere la función candidata de Lyapunov  $V_{\tilde{\theta}} = \tilde{\theta}^2$  y evaluando la derivada de ésta a lo largo de la trayectoria de  $\tilde{\theta}$ , tenemos:  $\dot{V}_{\tilde{\theta}} = -2\tilde{\theta}\sigma_{M\theta}(\tilde{\theta}) < 0$  para todo  $\tilde{\theta} \neq 0$ . Entonces,  $\tilde{\theta} \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$  y en consecuencia  $\theta \rightarrow \theta_d$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . Una vez que  $\theta = \theta_d$  el sistema (15) con  $u_1 = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}$  y  $r_1$  y  $r_2$  dadas por (20), se convierte en

$$\begin{cases} \dot{x}_{11} = x_{11} \\ \dot{x}_{12} = -\sigma_{M2}(a_1x_{12} + \sigma_{M1}(a_2x_{12} + a_1a_2x_{11})) \\ \dot{x}_{21} = x_{21} \\ \dot{x}_{22} = -\sigma_{M2}(b_1x_{22} + \sigma_{M1}(b_2x_{22} + b_1b_2x_{21})) \end{cases} \quad (22)$$

De acuerdo con el Lema 1, el sistema (22) es global y asintóticamente estable y además es exponencialmente estable de manera local. En consecuencia,  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$  bajo la restricción  $0 \leq \sqrt{2}M_2 \leq u_1$ . ■

*Observación 1:* Por simplicidad la prueba de convergencia fue realizada para el equilibrio  $x(t) = 0$ , sin embargo, es claro que este equilibrio puede trasladarse a cualquier punto del plano mediante un cambio apropiado de variable, e.g.  $\vartheta = x - x_d$ .

*Observación 2:* Gracias al resultado presentado en (Sontag, 1989), la estabilidad del sistema completo durante la fase en la que  $\theta(t) \rightarrow \theta_d(t)$ , es garantizada.

*Observación 3:* El cálculo de  $\theta_d$  depende del cuadrante en el que se encuentre el robot. Para poder trabajar en todo el plano, el ángulo deseado se calcula mediante:

$$\theta_d = \text{atan2}(r_2, r_1) \quad (23)$$

donde  $\theta_d \in [0, 360]$  representa al norte relativo, con rotación positiva en el sentido horario, i.e.  $\theta_d = 90$  grados, corresponde a una dirección hacia el Este.

*Observación 4:* De acuerdo a (17), la derivada del ángulo deseado está dada por  $\dot{\theta}_d = \frac{\dot{r}_2r_1 - r_1\dot{r}_2}{u_1^2}$ . En vista de lo anterior, la función de saturación  $\sigma_{M_j}$  con  $j = 1, 2$  debe ser diferenciable. Por lo tanto, con fines de implementación se utiliza la siguiente función, la cual es dos veces diferenciable:

$$\sigma(s) = \begin{cases} -1 & \text{si } s < -1 - \alpha \\ p_1(s) & \text{si } s \in [-1 - \alpha, -1 + \alpha] \\ s & \text{si } s \in [-1 + \alpha, 1 + \alpha] \\ p_2(s) & \text{si } s \in [1 - \alpha, 1 + \alpha] \\ +1 & \text{si } s > 1 + \alpha \end{cases} \quad (24)$$

con  $p_1(s) = e_1s^2 + e_2s + e_3$  y  $p_2(s) = -e_1s^2 + e_2s - e_3$ , donde  $e_1 = \frac{1}{4\alpha}$ ,  $e_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\alpha}$  y  $e_3 = \frac{\alpha^2 - 2\alpha + 1}{4\alpha}$ . Finalmente,

la función de saturación acotada por  $M_j$  y  $-M_j$  con  $j = 1, 2$ , se define por  $\sigma_{M_j}(\cdot) := M_j\sigma(\cdot)$ .

La representación en diagramas a bloques de la estrategia de control para el problema de regulación del sistema en lazo cerrado es mostrada en la Figura 2, donde se observan cuatro bloques: condiciones iniciales, modelo cinemático con extensión dinámica, sistema de control y reconstrucción.

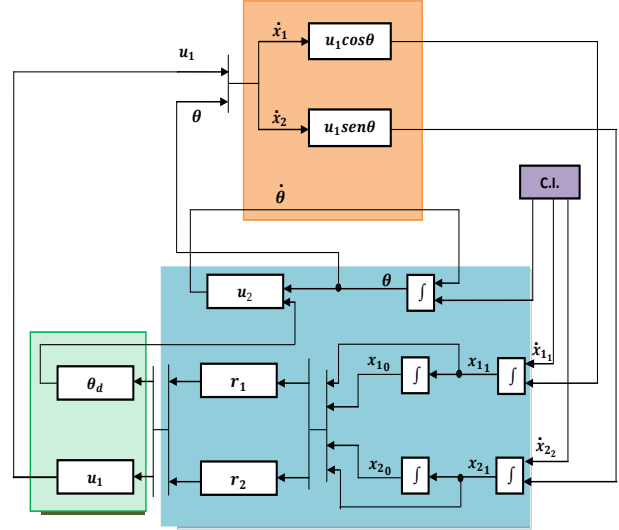


Figura 2. Diagrama a bloques del sistema y la estrategia de control.

#### IV. RESULTADOS

A continuación se muestran los resultados obtenidos en simulación del robot móvil aplicando la estrategia de control. Los parámetros correspondientes a la simulación son mostrados en la Tabla 1 para las leyes de control de estabilización  $u_1, u_2$  y la Tabla 2 muestra las condiciones iniciales para cuatro casos.

TABLA I  
PARÁMETROS PARA LA SIMULACIÓN

Límites de saturación	Coefficientes de A y B	Datos adicionales
$M_1 = 0,5$	$a_1 = 1$	$k_1 = 5$
$M_2 = 1,1$	$a_2 = 0,01$	$P = 0,3 \sin 0,1t$
$M_\theta = 1$	$b_1 = 2$	
	$b_2 = 0,01$	

TABLA II  
CONDICIONES INICIALES PARA SIMULACIÓN

Condiciones iniciales.	$x_{10}(cm)$	$x_{20}(cm)$	$\theta_0(rad)$
CI 1	90	100	1
CI 2	-80	46	2.1
CI 3	-65	-54	0.8
CI 4	82	-97	-1.2

La Figura 3 muestra las gráficas de comportamiento de las entradas  $u_1$  y  $u_2$  del sistema (1), así como la gráfica

representativa de la posición del robot móvil sobre el plano coordenado, resolviendo el problema de regulación para distintas condiciones iniciales dando como resultado la convergencia global al origen de forma asintótica. Las gráficas de  $u_1$  y  $u_2$  muestran el comportamiento de la velocidad lineal y angular del robot móvil para hacer notar la convergencia.

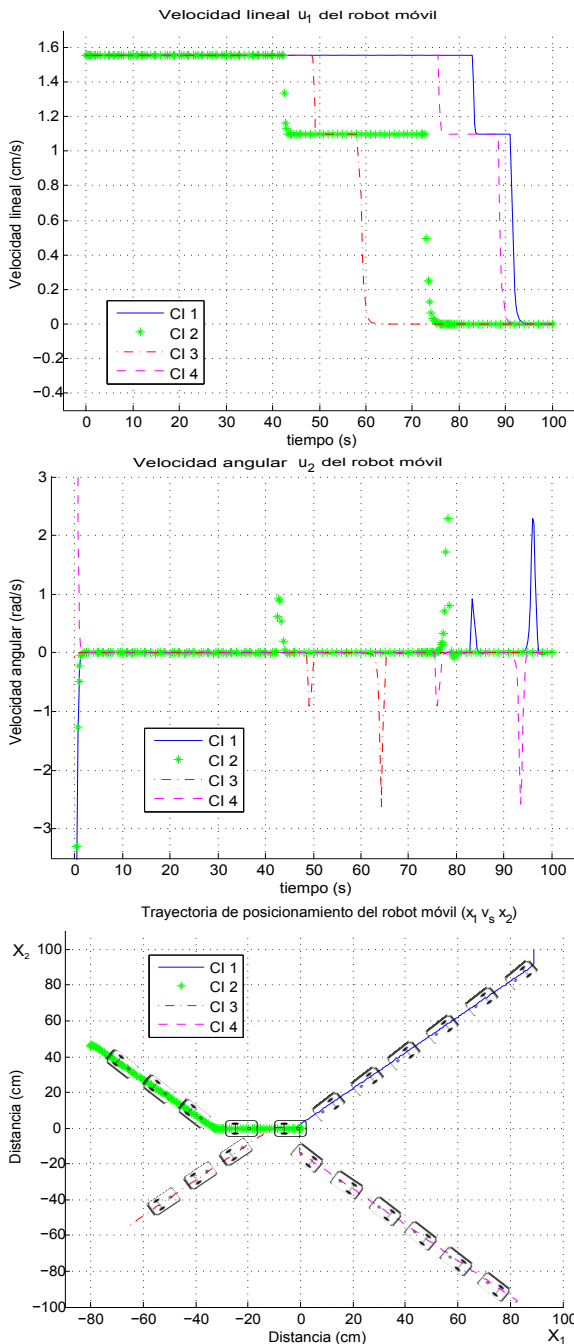


Figura 3. Respuesta del sistema sin perturbación.

Con el fin de corroborar la eficiencia del sistema de control se introduce una pequeña perturbación, sumando al estado  $\theta$  una función trigonométrica  $P(\theta) = A \sin(\theta)$ ,

asemejando una condición de cambio de dirección, por tal motivo las gráficas de la Figura 4 ilustran el comportamiento de  $u_1, u_2$  y  $X_1$  vs  $X_2$  con perturbación. Se hace la aclaración que por la suma de error en el estado  $\theta$  posterior a su convergencia al origen, en la condición inicial cuatro (CI4) la información es despreciable de la gráfica de  $u_2$ .

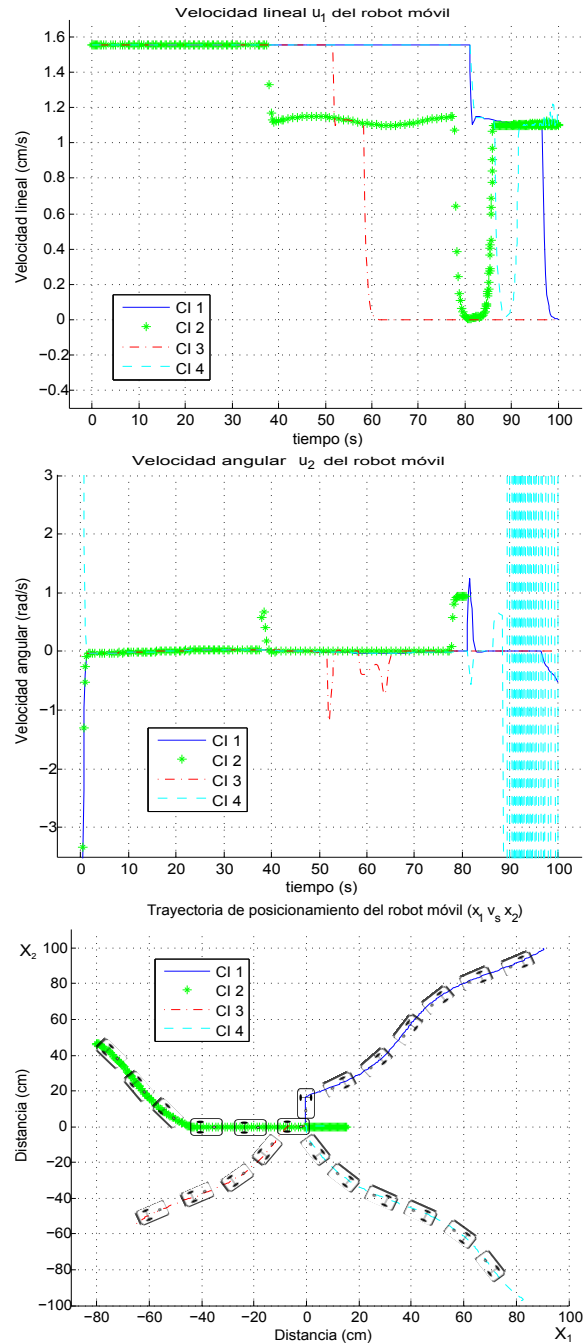


Figura 4. Respuesta del sistema con perturbación.

## V. CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS

En este trabajo se presentó una arquitectura de control basado en el esquema “lazo interno-lazo externo” para la

estabilización al origen de un robot móvil tipo (2,0). Las leyes de control no lineal son acopladas, y se toman en cuenta los límites aceptables en las señales de entrada del sistema. Esto se hace mediante funciones de saturación doblemente diferenciables. Como resultado se tiene una ley de control simple, la cual puede ser implementada en sistemas embebidos. Se mostró la prueba de convergencia del sistema en lazo cerrado en el sentido de Lyapunov.

En una etapa posterior se extenderá la técnica al problema de seguimiento de trayectorias, llevando a cabo la implementación y evaluación de la ley de control en el sistema real.

#### REFERENCIAS

- Bloch, A.M., McClamroch N.H. y M. Reyhanoglu (1991). Controllability and stabilizability properties of a nonholonomic control system. *IEEE Conf. on Decision and Control*.
- Campion, G., Bastin G. y B. D'Andrea-Novet (1996). Structural properties and classification of kinematic and dynamic models of wheeled mobile robots. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*.
- Campion, G., d'Andrea-Novet B. y G. Bastin (1991). Modelling and state-feedback control of non-holonomic mechanical systems. *31th IEEE Conf. on Decision and Control*.
- Canudas, C. y O. J. Sordalen (1992). Exponential stabilization of mobile robots with nonholonomic constraints. *IEEE Trans. Automat. Control* **37**, 1791–1797.
- Chang, J., QingxinMeng. (2010). Trajectory tracking control of nonholonomic wheeled mobile robots. *Proceedings of the 2010 IEEE International Conference on Information and Automation*.
- Johnson, E. N. y S. K. Kannan (2003). Nested saturation with guaranteed real poles. *Proceedings of the American Control Conference*.
- Marchand, N. y A. Hably (2005). Global stabilization of multiple integrators with bounded controls. *Automatica* pp. 2147–2152.
- Nascimento Martins, F., Carelli R. MarioSarcinelli-Filho y Freire Bastos T. (2008). Modelo dinámico y controlador de seguimiento para robots móviles tipo unicycle. *V Jornadas Argentinas de Robótica (JAR'08)*.
- Niño, P. A., Aranda E. y Velasco M. (2007). Control mediante modos deslizantes en tiempo discreto para el seguimiento de trayectorias de un robot móvil. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial* **4**, 31–38.
- Olfati-Saber, R (2000). Global configuration stabilization for the VTOL aircraft with strong input coupling. *39th IEEE Conf. on Decision and Control*.
- Pomet, J. B., Thuillot B. G. y G. Campion (1992). A hybrid strategy for the feedback stabilization of nonholonomic mobile robots. *Proc. 1992 IEEE Int. Conf. on Robotics And Automat.*
- Samson, C. y K. Ait-Abderrahim (1991). Feedback control of a nonholonomic wheeled cart in cartesian space. *Proc. of the 1991 IEEE, Int. Conf. Robotics Automat.*
- Silva, R., Molina M. A. Hernández V. M. Silva G. Marciano M. y Portilla E. A. (2008). Modeling and trajectory tracking control of a new mobile robot. *Revista Electrónica de Estudios Telemáticos. Télématique. CIDETEC-IPN*.
- Sira, R. H., Luviano J. A. Cortés R. J. (2011). Control lineal robusto de sistemas no lineales diferencialmente planos. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial* **8**(1), 14–28. ISSN:1697-7912.
- Sánchez, J. P. (2005). Control de un robot móvil mediante localización absoluta. Tesis de maestría. Sección de Mecatrónica - CINVESTAV.
- Sontag, E. (1989). Smooth stabilization implies coprime factorization. *IEEE Trans. Automat. Control* **34**, 1376–1378.
- Teel, A. R. (1992). Global stabilization and restricted tracking for multiple integrators with bounded controls. *Systems and Control Letters* pp. 165–171.
- Zavala, A., I. Fantoni y R. Lozano (2003). Global stabilization of a PVTOL aircraft model with bounded inputs. *International Journal of Control* **76**(18), 1833–1844.
- Zhang, M. y Hirschorn R. M. (1997). Discontinuous feedback stabilization of nonholonomic wheeled mobile robots. *Dynamics and control* pp. 155–169.